अनुक्रमांक   मुद्रित पृष्ठों की संख्या : 8

नाम ..

131

324 (BB)

2023

गणित

समय : तीन घण्टे 15 मिनट]   *[पूर्णांक : 100*

निर्देश :

(i) प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्न-पत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं ।

*(ii) इस प्रश्न-पत्र में कुल **नौ** प्रश्न हैं ।*

*(iii) **सभी** प्रश्न अनिवार्य हैं ।*

(iv) प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः उल्लेख किया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं ।

(v) प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं ।

(vi) प्रथम प्रश्न से आरंभ कीजिए और अंत तक करते जाइए ।

(vii) जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए ।

---

1. ***सभी*** खण्ड कीजिए । प्रत्येक खण्ड का सही विकल्प चुनकर अपनी उत्तर-पुस्तिका में लिखिए :

(क) यदि $f : X \to Y$ एक आच्छादक फलन है, यदि और केवल यदि f का परिसर होगा : *1*

(i) X (ii) $X \cap Y$ (iii) Y (iv) $X \cup Y$

(ख) $\tan^{-1}(\sqrt{3}) - \sec^{-1}(-2)$ का मान होगा : *1*

(i) π (ii) $-\frac{\pi}{3}$ (iii) $\frac{\pi}{3}$ (iv) $\frac{2\pi}{3}$

(ग) यदि $\begin{bmatrix} 2x-y & x+2y \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, तो x और y का मान होगा : *1*

(i) $x = 1,\ y = 1$ (ii) $x = 2,\ y = 1$

(iii) $x = \frac{1}{2},\ y = \frac{1}{2}$ (iv) $x = 1,\ y = \frac{1}{2}$

(घ) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$ का मान होगा : 1

(i) $\frac{1}{2a^2} \log \left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

(ii) $\frac{1}{2a} \log \left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

(iii) $\frac{1}{4a} \log \left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$

(iv) $\frac{1}{4a^2} \log \left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$

(ङ) अवकल समीकरण $(x-y)\frac{dy}{dx} = x + 2y$ की प्रकृति होगी : 1

(i) बहुघातीय

(ii) घात एक और रेखीय

(iii) समघातीय और घात शून्य

(iv) समघातीय और घात एक

2. ***सभी*** खण्ड कीजिए :

(क) सिद्ध कीजिए कि एक एकैकी फलन $f: \{2, 3, 4\} \rightarrow \{2, 3, 4\}$ आच्छादक है । 1

(ख) यदि $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ तथा $A + A' = I$, तो α का मान ज्ञात कीजिए । 1

(ग) यदि $\Delta = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, तो $|\Delta|$ का मान ज्ञात कीजिए । 1

(घ) व्यंजक $\hat{i}\,.\,\hat{i} + \hat{j}\,.\,\hat{j} + 2\hat{k}\,.\,\hat{k}$ का मान ज्ञात कीजिए । 1

(ङ) अवकल समीकरण

$$xy\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + x\frac{dy}{dx} - y = 2$$

की घात ज्ञात कीजिए । 1

3. ***सभी*** खण्ड कीजिए :

(क) सिद्ध कीजिए कि $f(x) = \tan x \ \forall x \in \mathbb{R}$ एक संतत फलन है । 2

(ख) यदि $y = A\sin x + B\cos x$ है, तो इसका अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए । 2

(ग) वक्र $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$ पर उन बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए जिन पर अभिलम्ब x-अक्ष के समान्तर हो । 2

(घ) यदि किसी आयत की लम्बाई 3 cm/min की दर से घट रही है और चौड़ाई 2 cm/min की दर से बढ़ रही है, तो $x = 10$ cm तथा $y = 6$ cm पर आयत के परिमाप में परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए, जहाँ $x =$ लम्बाई तथा $y =$ चौड़ाई । 2

4. ***सभी*** खण्ड कीजिए :

(क) सिद्ध कीजिए कि $f(x) = |x - 2|$, $x = 2$ पर अवकलनीय नहीं है । 2

(ख) मान ज्ञात कीजिए : 2

$$\int \tan^4 x \sec^2 x \, dx$$

(ग) यदि बिन्दुओं A, B, C और D के स्थिति सदिश क्रमशः $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $2\hat{i} + 5\hat{j}$, $3\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ और $\hat{i} - 6\hat{j} - \hat{k}$ हैं, तो सिद्ध कीजिए कि बिन्दु संरेख हैं । 2

(घ) आलेखीय विधि द्वारा निम्न व्यवरोधों के अन्तर्गत रैखिक प्रोग्रामन समस्या का हल कीजिए :

$$x + 2y \geq 10,$$
$$3x + 4y \leq 24,$$
$$x \geq 0, y \geq 0,$$

तो $z = 200x + 500y$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए । 2

5. ***सभी*** खण्ड कीजिए :

(क) रेखाओं $\vec{r} = (1 - t)\hat{i} + (t - 2)\hat{j} + (3 - 2t)\hat{k}$ तथा

$\vec{r} = (s + 1)\hat{i} + (2s - 1)\hat{j} - (2s + 1)\hat{k}$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए । 5

(ख) एक पाठशाला में 500 विद्यार्थी हैं, जिनमें से 230 लड़कियाँ हैं । यह ज्ञात है कि 230 में से 10% लड़कियाँ कक्षा XII में पढ़ती हैं । एक यादृच्छया चुना गया विद्यार्थी कक्षा XII में पढ़ता है तथा वह लड़की है, उसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए । 5

(ग) बिन्दु (1, 1) से गुज़रने वाले एक ऐसे वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका अवकल समीकरण $x \, dy = (2x^2 + 1) \, dx$ $(x \neq 0)$ है । 5

(घ) सिद्ध कीजिए कि दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के लिए सदैव $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \, |\vec{b}|$. 5

(ङ) मान ज्ञात कीजिए : 5

$$\int \left(\sqrt{\cot x} + \sqrt{\tan x}\right) dx$$

6. ***सभी*** खण्ड कीजिए :

(क) सिद्ध कीजिए कि किसी कॉलेज के पुस्तकालय की समस्त पुस्तकों के समुच्चय A में $R = \{(x, y) : x$ तथा y में पेजों की संख्या समान है$\}$ द्वारा प्रदत्त सम्बन्ध R एक तुल्यता सम्बन्ध है । 5

(ख) $y = x^{x^x}$ का अवकलन कीजिए । 5

(ग) मान लीजिए कि $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ है ।

तो एक ऐसा आव्यूह D ज्ञात कीजिए कि $CD - AB = 0$ हो । 5

(घ) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $A \, . \, adj\, A = |A| \, I$. 5

(ङ) किसी धनात्मक अचर a के लिए $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए, जहाँ $y = a^{t + \frac{1}{t}}$ तथा $x = (t + \frac{1}{t})^a$. 5

7. कोई *एक* खण्ड कीजिए :

(क) आव्यूह विधि से रैखिक समीकरण-निकाय को हल कीजिए : 8

$$3x + 2y + 3z = 5$$
$$-2x + y + z = -4$$
$$-x + 3y - 2z = 3$$

(ख) समतलों $\vec{r} \, . \, (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 6$ और $\vec{r} \, . \, (2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) = -5$ के प्रतिच्छेदन बिन्दु; तथा बिन्दु (1, 1, 1) से गुज़रने वाले समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए । 8

8. कोई *एक* खण्ड कीजिए :

(क) शत्रु का एक अपाचे हेलीकॉप्टर वक्र $y = x^2 + 7$ के अनुदिश प्रदत्त पथ पर उड़ रहा है । बिन्दु (3, 7) पर स्थित एक सैनिक अपनी स्थिति से निकटतम दूरी पर से उस हेलीकॉप्टर को गोली मारना चाहता है । निकटतम दूरी ज्ञात कीजिए । 8

(ख) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + y \cot x = 4x \operatorname{cosec} x \; (x \neq 0)$ का एक विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए । दिया गया है कि $y = 0$, जब $x = \frac{\pi}{2}$. 8

9. कोई एक खण्ड कीजिए :

(क) तीन डिब्बों में रंगीन गेंदें निम्न सारणी में दर्शाए अनुसार आबंटित की गई हैं :

डिब्बा	रंग		
	काला	सफेद	लाल
I	3	4	5
II	2	2	2
III	1	2	3

एक डिब्बे को यादृच्छया चुना गया और उसमें से एक गेंद निकाली गई । यदि गेंद का रंग काला है, तो इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि गेंद को डिब्बा-III से निकाला गया है । *8*

(ख) निम्नलिखित व्यवरोधों के अन्तर्गत $z = x + y$ का अधिकतमीकरण कीजिए : *8*

$x - y \leq -1, \; -x + y \leq 0$ और $x \geq 0, \; y \geq 0$

(English Version)

Instructions :

(i) *First 15 minutes time has been allotted for the candidates to read the question paper.*

(ii) *There are in all **nine** questions in this question paper.*

(iii) ***All** questions are compulsory.*

(iv) *In the beginning of each question, the number of parts to be attempted has been clearly mentioned.*

(v) *Marks allotted to the questions are indicated against them.*

(vi) *Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.*

(vii) *Do not waste your time over a question you cannot solve.*

1. Do ***all*** parts. Select the correct alternative of each part and write it in your answer book :

(a) If $f : X \to Y$ is an onto function, if and only if the range of f will be : *1*

(i) X (ii) $X \cap Y$ (iii) Y (iv) $X \cup Y$

(b) The value of $\tan^{-1}(\sqrt{3}) - \sec^{-1}(-2)$ will be : *1*

(i) π (ii) $-\frac{\pi}{3}$ (iii) $\frac{\pi}{3}$ (iv) $\frac{2\pi}{3}$

(c) If $\begin{bmatrix} 2x - y & x + 2y \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, then the value of x and y will be : *1*

(i) $x = 1, \; y = 1$ (ii) $x = 2, \; y = 1$

(iii) $x = \frac{1}{2}, \; y = \frac{1}{2}$ (iv) $x = 1, \; y = \frac{1}{2}$

(d) The value of $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$ will be : 1

(i) $\frac{1}{2a^2} \log \left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$ (ii) $\frac{1}{2a} \log \left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

(iii) $\frac{1}{4a} \log \left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$ (iv) $\frac{1}{4a^2} \log \left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$

(e) The nature of the differential equation $(x-y)\frac{dy}{dx} = x + 2y$ will be : 1

(i) Multipower (ii) Power one and linear

(iii) Homogeneous and power zero (iv) Homogeneous and power one

2. Do *all the* parts :

(a) Prove that a one-one function $f : \{2, 3, 4\} \to \{2, 3, 4\}$ is onto. 1

(b) If $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ and $A + A' = I$, then find the value of α. 1

(c) If $\Delta = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, then find the value of $|\Delta|$. 1

(d) Find the value of the expression $i \cdot i + j \cdot j + 2k \cdot k$. 1

(e) Find the degree of the differential equation

$$xy\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + x\frac{dy}{dx} - y = 2.$$ 1

3. Do *all* the parts :

(a) Prove that $f(x) = \tan x \ \forall x \in \mathbb{R}$ is a continuous function. 2

(b) If $y = A \sin x + B \cos x$, then find the differential equation of it. 2

(c) Find those points on the curve $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$, on which the normal is parallel to the x-axis. 2

(d) If the length of a rectangle is decreasing at the rate of 3 cm/min and width is increasing at the rate of 2 cm/min, then find the rate of change in perimeter of the rectangle when x = 10 cm and y = 6 cm, where x = length and y = width. 2

4. Do ***all*** the parts :

(a) Prove that $f(x) = |x-2|$ is not differentiable at $x = 2$. 2

(b) Evaluate : 2

$$\int \tan^4 x \sec^2 x \, dx$$

(c) If the position vectors of the points A, B, C and D are $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $2\hat{i} + 5\hat{j}$, $3\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ and $\hat{i} - 6\hat{j} - \hat{k}$, respectively. Prove that the points are collinear. 2

(d) By graphical method solve the LPP under the following constraints :

$$x + 2y \geq 10,$$

$$3x + 4y \leq 24,$$

$$x \geq 0, y \geq 0,$$

then find the minimum value of $z = 200x + 500y$. 2

5. Do ***all*** the parts :

(a) Find the shortest distance between the lines

$\vec{r} = (1-t)\hat{i} + (t-2)\hat{j} + (3-2t)\hat{k}$ and $\vec{r} = (s+1)\hat{i} + (2s-1)\hat{j} - (2s+1)\hat{k}$. 5

(b) There are 500 students in a school, of which 230 are girls. Also, 10% of 230 girls are studying in class XII. Find the probability that a randomly chosen student is of XII class and is a girl. 5

(c) Find the equation of the curve which is passing through the point (1, 1) and whose differential equation is $x\,dy = (2x^2 + 1)\,dx$ $(x \neq 0)$. 5

(d) For any two vectors $\vec{a}$ and $\vec{b}$, prove that always $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}|\,|\vec{b}|$. 5

(e) Evaluate : 5

$$\int \left(\sqrt{\cot x} + \sqrt{\tan x}\right) dx$$

6. Do ***all*** the parts :

(a) A relation $R = \{(x, y) :$ Number of pages in x and y are equal$\}$ is defined on the set A of all books in a college library. Prove that R is an equivalence relation. 5

(b) Differentiate : $y = x^{x^x}$. 5

(c) Let $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$.

Then find a matrix D such that $CD - AB = 0$. 5

(d) If $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, then prove that $A \,.\, \text{adj}\, A = |A|\, I$. 5

(e) For any positive constant a, evaluate $\frac{dy}{dx}$, where $y = a^{t+\frac{1}{t}}$ and $x = (t + \frac{1}{t})^a$. 5

7. Do any *one* part :

(a) Solve the system of linear equations by matrix method : 8

$$3x + 2y + 3z = 5$$
$$-2x + y + z = -4$$
$$-x + 3y - 2z = 3$$

(b) Find the equation of the plane which passes through the intersecting point of the planes $\vec{r} \,.\, (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 6$ and $\vec{r} \,.\, (2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) = -5$; and the point (1, 1, 1). 8

8. Do any *one* part :

(a) An Apache helicopter of the enemy is flying along the curve $y = x^2 + 7$. A soldier placed at the point (3, 7), wants to shoot down the helicopter when it is nearest to him. Find the nearest distance. 8

(b) Find the particular solution of the differential equation

$\frac{dy}{dx} + y \cot x = 4x \operatorname{cosec} x \; (x \neq 0)$. Given that $y = 0$, when $x = \frac{\pi}{2}$. 8

9. Do any *one* part :

(a) Coloured balls are distributed in three containers according to the following table :

Container	Colour		
	Black	White	Red
I	3	4	5
II	2	2	2
III	1	2	3

A ball is drawn out from a container randomly chosen. If the ball is black, then find the probability that the ball is drawn from Container-III. 8

(b) Find the maximization of $z = x + y$, under the following constraints :

$x - y \leq -1, \; -x + y \leq 0$ and $x \geq 0, y \geq 0$. 8