मुद्रित पृष्ठों की संख्या : 16

नाम ....

131

324 (FF)

2022

गणित

समय : तीन घण्टे 15 मिनट] *[पूर्णांक : 100*

निर्देश :

(i) *प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्न-पत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं ।*

(ii) *इस प्रश्न-पत्र में कुल नौ प्रश्न हैं ।*

(iii) ***सभी** प्रश्न अनिवार्य हैं ।*

(iv) *प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः उल्लेख किया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं ।*

(v) *प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं ।*

(vi) *प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अंत तक करते जाइए ।*

(vii) *जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए ।*

1. निम्नलिखित ***सभी*** खण्डों को हल कीजिए :

(क) यदि L किसी समतल में स्थित समस्त सरल रेखाओं का एक समुच्चय है तथा संबंध

$$R = \{(L_1, L_2) : L_1, L_2 \text{ पर लम्ब है}\}$$

समुच्चय L में परिभाषित है । निम्नलिखित में से सही उत्तर चुनिए : *1*

(i) R स्वतुल्य है (ii) R सममित है

(iii) R संक्रामक है (iv) इनमें से कोई नहीं

(ख) यदि आव्यूह A और B के क्रम (कोटि) क्रमशः $m \times n$ और $n \times p$ हैं, तो AB का क्रम है : *1*

(i) $p \times m$ (ii) $n \times m$

(iii) $m \times p$ (iv) इनमें से कोई नहीं

(ग) अवकल समीकरण

$$xy\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{dy}{dx} = 2$$

की घात है : *1*

(i) 0 (ii) 1

(iii) 2 (iv) 3

(घ) व्यंजक $\hat{i}\,.\,\hat{i} - \hat{j}\,.\,\hat{j} + \hat{k}\,.\,\hat{k}$ का मान है : *1*

(i) 0 (ii) 1

(iii) 2 (iv) 3

(ङ) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sqrt{\tan x}}$ का मान होगा : 1

(i) 0 (ii) $\frac{\pi}{2}$

(iii) $\frac{\pi}{4}$ (iv) $\frac{\pi}{8}$

2. निम्नलिखित ***सभी*** खण्डों को हल कीजिए :

(क) फलन $f : R \to R$, $f(x) = x^2 \ \forall \ x \in R$ द्वारा परिभाषित है, तो फलन f है : 1

(i) एकैकी आच्छादक

(ii) बहु-एक आच्छादक

(iii) एकैकी, किन्तु आच्छादक नहीं

(iv) न तो एकैकी और न ही आच्छादक

(ख) यदि $f : R \to R$ जहाँ $f(x) = \cos x$ और $g : R \to R$ जहाँ $g(x) = x^2$, तो सिद्ध कीजिए कि $fog \neq gof$. 1

(ग) $\cot^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ का मुख्य मान होगा : 1

(i) $\frac{\pi}{3}$ (ii) $\frac{\pi}{6}$

(iii) $\frac{2\pi}{3}$ (iv) इनमें से कोई नहीं

(घ) सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = |x|$, $x = 0$ पर संतत है। 1

(ङ) यदि $\Delta\ ABC$ के शीर्ष $A(1, 1, 1)$, $B(1, 2, 3)$ और $C(2, 3, 1)$ हों, तो $\Delta\ ABC$ का क्षेत्रफल वर्ग इकाई में है : 1

(i) $\frac{\sqrt{21}}{2}$ (ii) $\frac{\sqrt{22}}{3}$

(iii) $\frac{\sqrt{23}}{3}$ (iv) इनमें से कोई नहीं

3. निम्नलिखित ***सभी*** खण्डों को हल कीजिए :

(क) $y - x\frac{dy}{dx} = a\left(y^2 + \frac{dy}{dx}\right)$ को हल कीजिए। 2

(ख) यदि $f : A \to B$ तथा $g : B \to C$ एकैकी हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $gof : A \to C$ भी एकैकी होगा। 2

(ग) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, तो AB तथा BA का मान ज्ञात कीजिए। 2

(घ) सिद्ध कीजिए कि $\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$. 2

4. निम्नलिखित ***सभी*** खण्डों को हल कीजिए :

(क) यदि $\Delta\ ABC$ के शीर्ष $A(2, -6), B(5, 4), C(k, 4)$ और उसका क्षेत्रफल 35 वर्ग इकाई हो, तो सिद्ध कीजिए कि k का मान $12, -2$ होगा । 2

(ख) यदि $\tan^{-1}\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right) + \tan^{-1}\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए । 2

(ग) सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & x & yz \\ 1 & y & zx \\ 1 & z & xy \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए । 2

(घ) सिद्ध कीजिए कि दिए हुए सम्पूर्ण पृष्ठ और महत्तम आयतन वाले लम्ब-वृत्तीय शंकु का अर्ध-शीर्ष कोण $\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{3}\right)$ होता है । 2

5. निम्नलिखित में से किन्हीं ***पाँच*** खण्डों को हल कीजिए :

(क) दो वृत्तों $x^2 + y^2 = 4$ एवं $(x-2)^2 + y^2 = 4$ के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए । 5

(ख) समाकल $\displaystyle\int \frac{x^4\,dx}{(x-1)(x^2+1)}$ ज्ञात कीजिए । 5

(ग) हल कीजिए : 5

$$(1+y^2)\,dx = (\tan^{-1} y - x)\,dy$$

(घ) दर्शाइए कि : 5

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc\left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

(ङ) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$ को एक सममित आव्यूह तथा एक विषम-सममित आव्यूह के योगफल के रूप में व्यक्त कीजिए । 5

(च) सिद्ध कीजिए कि :

$$\tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}\right] = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cos^{-1} x$$

जहाँ $-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \le x \le 1.$ 5

6. निम्नलिखित में से किन्हीं ***पाँच*** खण्डों को हल कीजिए :

(क) सिद्ध कीजिए कि : 5

$$\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ca & cb & c^2+1 \end{vmatrix} = 1 + a^2 + b^2 + c^2$$

(ख) यदि एक समतल द्वारा निर्देशांक अक्षों पर अन्तःखण्ड क्रमशः a, b, c हैं और इसकी मूल-बिन्दु से दूरी p है, तो सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} = \dfrac{1}{p^2}.$ 5

(ग) यदि $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z = \pi$, तो सिद्ध कीजिए कि $x + y + z = xyz$. 5

(घ) अवकल समीकरण

$$\left[x \sin^2\left(\frac{y}{x}\right) - y\right] dx + x\, dy = 0,$$

$y = \frac{\pi}{4}$ यदि $x = 1$ को हल कीजिए । 5

(ङ) सिद्ध कीजिए कि : 5

$$\int_0^{\pi/2} \log(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \log \frac{1}{2}$$

(च) $P(A \cup B)$ ज्ञात कीजिए यदि $2P(A) = P(B) = \frac{5}{13}$ और $P(A|B) = \frac{2}{5}$ है । 5

7. निम्नलिखित में से किसी ***एक*** खण्ड को हल कीजिए :

(क) (i) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, तो सिद्ध कीजिए कि

$$A^3 - 6A^2 + 7A + 2I = 0.$$ 4

(ii) वक्र $y = x^3 + 2x + 6$ के उन अभिलंबों के समीकरण ज्ञात कीजिए, जो रेखा $x + 14y + 4 = 0$ के समांतर हैं । 4

(ख) (i) फलन $f(x) = \begin{cases} x & \text{यदि } x \le 1 \\ 5 & \text{यदि } x > 1 \end{cases}$

द्वारा परिभाषित है तो क्या f, $x = 0$, $x = 1$ तथा $x = 2$ पर संतत है ? 4

(ii) यदि $y = e^{a \cos^{-1} x}$, $-1 \le x \le 1$, तो

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - a^2 y = 0.$$ 4

8. निम्नलिखित में से किसी ***एक*** खण्ड को हल कीजिए :

(क) प्रारंभिक संक्रियाओं के प्रयोग द्वारा निम्नलिखित आव्यूह का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए : 8

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

(ख) रेखाओं $\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$ और $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए । 8

9. निम्नलिखित में से किसी ***एक*** खण्ड को हल कीजिए :

(क) दिए गए आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ के लिए

सत्यापित कीजिए कि $A \cdot (\text{adj } A) = |A|\, I$ और इसका व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए । 8

(ख) सिद्ध कीजिए कि R त्रिज्या के गोले के अंतर्गत विशालतम लम्ब-वृत्तीय शंकु का आयतन गोले के आयतन का $\frac{8}{27}$ होता है। 8

(English Version)

Instructions :

(i) First 15 minutes time has been allotted for the candidates to read the question paper.

*(ii) There are in all **nine** questions in this question paper.*

*(iii) **All** questions are compulsory.*

(iv) In the beginning of each question, the number of parts to be attempted has been clearly mentioned.

(v) Marks allotted to the questions are indicated against them.

(vi) Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.

(vii) Do not waste your time over a question you cannot solve.

1. Attempt ***all*** parts of the following :

(a) If L is a set of all straight lines in any plane and relation

$R = \{(L_1, L_2) : L_1$ is perpendicular to $L_2\}$

is defined in L. Select the correct answer from the following : 1

(i) R is reflexive (ii) R is symmetric

(iii) R is transitive (iv) None of these

(b) If the order of matrices A and B are respectively $m \times n$ and $n \times p$, then the order of AB is : 1

(i) $p \times m$ (ii) $n \times m$

(iii) $m \times p$ (iv) None of these

(c) The degree of the differential equation $xy \frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{dy}{dx} = 2$ is : 1

(i) 0 (ii) 1

(iii) 2 (iv) 3

(d) The value of the expression $\hat{i}.\hat{i} - \hat{j}.\hat{j} + \hat{k}.\hat{k}$ is : 1

(i) 0 (ii) 1

(iii) 2 (iv) 3

(e) The value of $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sqrt{\tan x}}$ will be : 1

(i) 0 (ii) $\frac{\pi}{2}$

(iii) $\frac{\pi}{4}$ (iv) $\frac{\pi}{8}$

2. Attempt ***all*** parts of the following :

(a) The function $f : R \to R$, $f(x) = x^2 \; \forall \, x \in R$ is defined, then f is : *1*

(i) one-one onto

(ii) many-one onto

(iii) one-one, but not onto

(iv) neither one-one nor onto

(b) If $f : R \to R$ where $f(x) = \cos x$ and $g : R \to R$ where $g(x) = x^2$, then prove that $fog \neq gof$. *1*

(c) The principal value of $\cot^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ will be : *1*

(i) $\frac{\pi}{3}$ (ii) $\frac{\pi}{6}$

(iii) $\frac{2\pi}{3}$ (iv) None of these

(d) Prove that the function $f(x) = |x|$ is continuous at $x = 0$. *1*

(e) The area of $\Delta\, ABC$, whose vertices are $A(1, 1, 1)$, $B(1, 2, 3)$ and $C(2, 3, 1)$ in square units is : *1*

(i) $\frac{\sqrt{21}}{2}$ (ii) $\frac{\sqrt{22}}{3}$

(iii) $\frac{\sqrt{23}}{3}$ (iv) None of these

3. Attempt ***all*** parts of the following :

(a) Solve $y - x\frac{dy}{dx} = a\left(y^2 + \frac{dy}{dx}\right)$. 2

(b) If $f : A \to B$ and $g : B \to C$ are one-one, then prove that $gof : A \to C$ is also one-one. 2

(c) If $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, then find AB and BA. 2

(d) Prove that $\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$. 2

4. Attempt ***all*** parts of the following :

(a) If vertices of $\Delta\, ABC$ are $A(2, -6)$, $B(5, 4)$ and $C(k, 4)$ and if the area of $\Delta\, ABC$ be 35 square units, then prove that the value of k will be 12, – 2. 2

(b) If $\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x-2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \frac{\pi}{4}$, then find the value of x. 2

(c) Find the value of the determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & x & yz \\ 1 & y & zx \\ 1 & z & xy \end{vmatrix}.$$

(d) Show that the semi-vertical angle of right circular cone of given total surface and maximum volume is $\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$. 2

5. Attempt any *five* parts of the following :

(a) Find the area between region of two circles $x^2 + y^2 = 4$ and $(x-2)^2 + y^2 = 4$. 5

(b) Find the integral $\int \frac{x^4\,dx}{(x-1)(x^2+1)}$. 5

(c) Solve : https://www.upboardonline.com 5

$$(1 + y^2)\,dx = (\tan^{-1} y - x)\,dy$$

(d) Show that : 5

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc\left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

(e) Express the matrix $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$ as the sum of a symmetric and a skew symmetric matrix. 5

(f) Prove that :

$$\tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}\right] = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cos^{-1} x,$$

where $-\frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le 1$. 5

6. Attempt any *five* parts of the following :

(a) Prove that : 5

$$\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ca & cb & c^2+1 \end{vmatrix} = 1 + a^2 + b^2 + c^2$$

(b) If a, b, c are the intercepts on coordinate axes respectively by a plane and its distance from the origin is p, then prove that $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{p^2}$. 5

(c) If $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z = \pi$, then prove that $x + y + z = xyz$. 5

(d) Solve the differential equation

$$\left[x \sin^2\left(\frac{y}{x}\right) - y\right] dx + x\,dy = 0,$$

$y = \frac{\pi}{4}$ if $x = 1$. 5

(e) Prove that $\int_0^{\pi/2} \log(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\log\frac{1}{2}$. 5

(f) Find $P(A \cup B)$, if $2P(A) = P(B) = \frac{5}{13}$ and $P(A|B) = \frac{2}{5}$. 5

7. Attempt any *one* part of the following :

(a) (i) If $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, then prove that

$A^3 - 6A^2 + 7A + 2I = 0.$ 4

(ii) Find the equations of the normals, to the curve $y = x^3 + 2x + 6$, which are parallel to the line $x + 14y + 4 = 0$. 4

(b) (i) Is the function f defined by

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{if } x \le 1 \\ 5 & \text{if } x > 1 \end{cases}$$ continuous at

$x = 0$, $x = 1$ and $x = 2$? 4

(ii) If $y = e^{a \cos^{-1} x}$, $-1 < x < 1$, then

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - a^2 y = 0.$$ 4

8. Attempt any *one* part of the following :

(a) By using elementary transformation, find the inverse of the following matrix : 8

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Find the shortest distance between the lines $\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$ and

$\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$. 8

9. Attempt any *one* part of the following :

(a) Verify : $A . (\text{adj } A) = |A| \, I$ for the given matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ and find its inverse. 8

(b) Prove that the volume of the largest right circular cone that can be inscribed in a sphere of radius R is $\frac{8}{27}$ of the volume of the sphere. 8